Convergences et approximations

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

I Loi faible des grands nombres

I.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 1

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une var admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant$$

Preuve : puisque X admet un moment d'ordre 2, X admet bien une espérance μ et une variance.

☐ Si X est une variable discrète :

On pose $X(\Omega) = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i = P([X = x_i])$.

Par définition on sait que

$$V(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\,(x_i - \mu)^2 \qquad \text{où } \mu = E(X)$$

Et de plus pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé :

$$P(|X-\mu| \geqslant \varepsilon) = \sum_{j \in J} p_j \quad \text{où } J = \{j \in I \mid |x_j - \mu| \geqslant \varepsilon\}$$

On peut donc écrire :

$$V(X) = \sum_{j\in J} p_j\,(x_j-\mu)^2 + \sum_{i \notin J} p_i\,(x_i - \mu)^2$$

$$V(X) \geqslant \sum_{j\in J} p_j\,(x_j-\mu)^2 \quad \text{Or } \forall j \in J,\ |x_j-\mu|^2 \geqslant \varepsilon^2$$

$$\text{D'où } V(X) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{j \in J} p_j$$

$$V(X) \geqslant \varepsilon^2 P(|X-\mu| \geqslant \varepsilon)$$

$$\text{Donc} \quad P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

☐ Si X est une variable à densité : on se fixe un réel $\varepsilon > 0$.

On a ici $V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

■

REMARQUES :

(i) Lorsque $|X - E(X)| \geqslant \varepsilon$, les valeurs de X sont à une distance plus grande que ε de leur moyenne $E(X)$. Donc $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$ mesure la probabilité que X prenne des valeurs éloignées de $E(X)$. Cette probabilité est d'autant plus faible que $V(X)$ est petit (la variance mesure la dispersion des valeurs prises par X) et que ε est grand (plus on est loin de la moyenne, moins on trouve de valeurs de X).

(ii) En posant $\mu = E(X)$, $\sigma = \sigma(X)$ et en prenant $\varepsilon = k\,\sigma$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit

I.2 Convergence en probabilité

Théorème 2 (loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de var deux à deux indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, admettant toutes *la même espérance* μ et *la même variance* σ^2.

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$

$$\text{Alors} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} P\big(\,|\overline{X_n} - \mu| \geqslant \varepsilon\,\big) = \ldots\ldots$$

On dit que la suite $(\overline{X_n})$ *converge en probabilité* vers la variable aléatoire constante égale à μ.

Preuve : on a $E(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) =$

et comme les variables sont 2 à 2 indépendantes, $V(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) =$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé,

$$0 \leqslant P\left(|\overline{X_n} - \mu| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \text{―――――}$$

Donc par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} P\left(|\overline{X_n} - \mu| \geqslant \varepsilon\right) =$

■

REMARQUE :

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, et un évènement S (le «succès»), de probabilité p, qui peut ou non se réaliser au cours d'une des épreuves. On note X_i la variable qui vaut 1 si S s'est réalisé à la i-ème épreuve et 0 sinon. Dans ce cas $\overline{X_n}$ représente la fréquence de réalisation de l'évènement S au cours des n première épreuves. La loi faible des grands nombres nous dit que cette fréquence «tend» vers p lorsque n tend vers $+\infty$.

Cela justifie *a posteriori* l'approche intuitive de la notion de probabilité, c'est-à-dire comme étant la limite de la fréquence d'apparition de l'événement donné.

II Convergence en loi

II.1 Suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de var **discrètes** définies sur Ω, toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit Y une var **discrète** à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers Y ssi

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} P(X_n = k) =$$

On écrit alors $X_n \underset{(n\to+\infty)}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Y$

Remarque : on a vu en exercice que si X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n\,,\,\dfrac{\lambda}{n}\right)$

alors $\quad P(X_n = k) = \qquad\qquad \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow}$

ce qui se traduit en disant que

En pratique :
on considère que lorsque $n \geqslant 50$, $\quad p \leqslant 0,1$ et $np < 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$. On dit que la loi de Poisson est la loi des événements rares.

Exemple : soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(100\,;0,05)$.
Calculons $P(X=2)$.
☐ Calcul exact :

$$P(X=2) = \binom{100}{2}(0,05)^2(0,95)^{98} \approx$$

☐ Calcul approché : on remplace la loi $\mathscr{B}(100\,;0,05)$ par la loi $\mathscr{P}(5)$

$$P(X=2) \approx$$

II.2 Cas général

Définition 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de var définies sur $(\Omega,\, \mathcal{T},\, P)$.
On note F_n la fonction de répartition de X_n.

On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers une var Y de fonction de répartition G, ssi pour tout réel x **en lequel G est continue**,

la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ...

Une suite de var discrètes peut converger en loi vers une var à densité.

Exemple : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire discrète X_n qui suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}$, c'est à dire que l'on a

$$\forall\, k \in [\![0\,,\,n-1]\!],\quad P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 3

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers une variable Y de fonction de répartition G.
Alors pour tous réels a et b, points de continuité de G tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(a < X_n \leqslant b) =$$

II.3 Théorème de la limite centrée

Théorème 4 (admis)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et **mutuellement indépendantes**.
On suppose que les X_n suivent toutes **la même loi** d'espérance μ et de variance non nulle σ^2.

$$\text{On pose} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad X_n^* = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Alors la suite $(X_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire U de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarques :

- On a donc pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(a < X_n^* \leqslant b) =$$

- En posant $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i =$, on obtient $S_n =$

  ce théorème nous permet de dire que pour n assez grand, la variable aléatoire S_n suit approximativement la loi

- Ce théorème remarquable montre l'importance de la loi normale en probabilités (et en statistiques). Il est à l'origine de plusieurs approximations de lois.

III Approximations de lois usuelles

III.1 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

soit n un entier fixé, $n \geqslant 1$ et $p \in]0;1[$. On pose $I = \{N \in \mathbb{N} \mid Np \in \mathbb{N}\}$

Si $(X_N)_{N \in I}$ est une suite de var telle que pour tout entier $N \in I$, X_N suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ alors (X_N) converge en loi vers une var Y qui suit la loi

...

En pratique : dès que $\dfrac{n}{N} < 0,1$; on peut approcher la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ par la loi binomiale ...

> **Exemple** : soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(100\,;4\,;\,0,05)$.
> Calculons $P(X \geqslant 1)$.
> ☐ Calcul exact :
>
> $$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) =$$
>
> ☐ Calcul approché : on remplace la loi $\mathcal{H}(100\,;\,4\,;\,0,05)$ par la loi $\mathscr{B}(4\,;\,0,05)$
>
> $$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) =$$

III.2 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Proposition 5

Soit $p \in]0;1[$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires telle que S_n suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Alors la suite de variables aléatoires $(S_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n^* =$$

converge en loi vers une variable aléatoire U de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,\,1)$.

Preuve : toute variable binomiale de paramètres n, p peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes.

On a donc $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où X_i est une variable de Bernoulli de paramètre p. Comme les variables de Bernoulli admettent pour espérance p et pour variance $p(1-p)$, le théorème de la limite centrée s'applique et il fournit le résultat demandé. ■

En pratique : on considère que lorsque $n > 30$, $np \geqslant 15$ et $np(1-p) > 5$, on peut remplacer la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}\left(np\,,\,\sqrt{np(1-p)}\,\right)$.

Correction de continuité :
si S_n suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ telle qu'on puisse approcher S_n par Y qui suit la loi $\mathcal{N}\left(np\,,\,\sqrt{np(1-p)}\,\right)$, on devrait écrire :

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad P(S_n = k) \approx P(Y = k)$$

mais comme Y est une variable à densité, on a $P(Y = k) = 0$, donc notre approximation ci-dessus n'est pas bonne. On écrira plutôt :

$$P(S_n = k) \approx$$

III.3 Approximation d'une loi du «Khi-deux» par une loi normale

Proposition 6

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,\,1)$. Alors la suite de variables aléatoires (S_n^*) définie par

$$S_n^* =$$

converge en loi vers une

En pratique : on considère que lorsque $n > 100$, on peut remplacer la loi du