utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

MÉDIAN MTA1 - AUTOMNE 2018
DURÉE : 1H30

Informations importantes

- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- **Le barème donné est susceptible d'être modifié.**
- **Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- **La présentation, la qualité de la rédaction, et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.**
- **Chaque exercice doit être rédigé sur une nouvelle copie.**

Exercice 1 .... (4 points)

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\Delta = 6 - 8i$.
2. Déterminer les solutions complexes de l'équation $(E)\ :\ iz^2 + i\sqrt{2}z + 2i + 2 = 0$.

Exercice 2 .... (4 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

On considère l'application $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - 4y, 2x + 3y). \end{array}$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ suivant : $\begin{cases} x - 4y = a \\ 2x + 3y = b. \end{cases}$
2. En déduire que f est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3 .... (7 points)

À rédiger sur une nouvelle copie

1. Démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 0$, $\dfrac{2x+1}{(2x+2)^2} \leq \dfrac{1}{2x+3}$.
2. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. Calculer u_0 et u_1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'écriture en factorielles des coefficients binomiaux, prouver que :
$$u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n.$$
4. En utilisant la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$u_n^2 \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Correction

Correction de l'exercice 1.

1. Les racines carrées de Δ sont les nombres complexes Δ solutions de l'équation $\delta^2 = \Delta$. On pose $\delta = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$|\Delta| = \sqrt{6^2 + (-8^2)} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta &\iff \begin{cases} \left|\delta^2\right| = |\Delta| \\ \delta^2 = \Delta \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |\delta|^2 = 10 \\ (a+ib)^2 = 6 - 8i \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ (a^2 - b^2) + i2ab = 6 - 8i \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \quad (L_1) \\ a^2 - b^2 = 6 \qquad (L_2) \\ 2ab = -8 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^2 = 16 \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ a^2 - b^2 = 6 \\ ab = -4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = a^2 - 6 = 2 \\ ab = -4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \text{ ou } a = -2\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \text{ ou } b = -\sqrt{2} \\ ab = -4 \end{cases} \\
&\iff \left(a = 2\sqrt{2} \ \text{ et } \ b = -\sqrt{2}\right) \quad \text{ou} \quad \left(a = -2\sqrt{2} \text{ et } b = \sqrt{2}\right) \\
&\iff \delta = 2\sqrt{2} - i\sqrt{2} \ \text{ ou } \ \delta = -2\sqrt{2} + i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les racines carrées de Δ sont $2\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

2. Le discriminant de (E) est égal à : $\left(i\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times i \times (2i + 2) = 6 - 8i = \Delta$. D'après la question 1, $\delta = 2\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ est une racine carrée de Δ. L'équation (E) admet donc exactement deux solutions z_1 etz_2 données par :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-i\sqrt{2} - \delta}{2 \times i} = \dfrac{-i\sqrt{2} - \left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)}{2i} = \dfrac{-\sqrt{2}}{i} = i\sqrt{2} \\ z_2 = \dfrac{-i\sqrt{2} + \delta}{2 \times i} = \dfrac{-i\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)}{2i} = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{i} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x - 4y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases} \quad &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = a + 4y \\ 2(a+4y) + 3y = b \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = a + 4y \\ 11y = b - 2a \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = a + 4y \\ y = \frac{b-2a}{11} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = a + 4\frac{b-2a}{11} = \frac{3a+4b}{11} \\ y = \frac{b-2a}{11} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow (x,y) = \left(\frac{3a+4b}{11}, \frac{b-2a}{11} \right).
\end{aligned}$$

2. D'après la question 1, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (a,b)$. Cet élément (x,y) est donné par : $(x,y) = \left(\frac{3a+4b}{11}, \frac{b-2a}{11}\right)$. On en déduit que f est bijective (car chaque élément $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par f) et que sa bijection réciproque f^{-1} est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \longmapsto & \left(\dfrac{3a+4b}{11}, \dfrac{b-2a}{11} \right). \end{array}$$

Correction de l'exercice 3.

1. Soit $x \geq 0$. On remarque que :
   - $2x + 3 \geq 3$ donc $2x + 3 > 0$,
   - $2x + 2 \geq 2$ donc $(2x+2)^2 \geq 4$ et donc $(2x+2)^2 > 0$,
   - de plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x+3} - \frac{2x+1}{(2x+2)^2} &= \frac{(2x+2)^2 - (2x+1)(2x+3)}{(2x+3)(2x+2)^2} \\
&= \frac{\left(4x^2 + 8x + 4\right) - \left(4x^2 + 8x + 3\right)}{(2x+3)(2x+2)^2} \\
&= \frac{1}{(2x+3)(2x+2)^2}.
\end{aligned}$$

   On en déduit donc que $\dfrac{1}{(2x+3)(2x+2)^2} > 0$ et donc $\dfrac{1}{2x+3} - \dfrac{2x+1}{(2x+2)^2} > 0$. Ainsi,

$$\frac{2x+1}{(2x+2)^2} \leq \frac{1}{2x+3}.$$

2. Par définition : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. Donc $u_0 = \dfrac{\binom{0}{0}}{4^0} = \dfrac{1}{1} = 1$ et $u_1 = \dfrac{\binom{2}{1}}{4^1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!\ (2n-n)!} = \dfrac{(2n)!}{n!\ n!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (\star).$$

On a de même :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{4^{n+1}}\ \frac{\big(2(n+1)\big)!}{\big((n+1)!\big)^2} = \frac{1}{4^{n+1}}\ \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} = \frac{1}{4^{n+1}}\ \frac{(2n+2)(2n+1)\ (2n)!}{\big((n+1)\,n!\big)^2} \\
&= \frac{1}{4^{n+1}}\ \frac{2(n+1)(2n+1)\ (2n)!}{(n+1)^2\,\big(n!\big)^2} = \frac{1}{4^{n+1}}\ \frac{2(2n+1)}{n+1}\ \frac{(2n)!}{\big(n!\big)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{1}{4^n}\ \frac{(2n)!}{\big(n!\big)^2}\right) = \frac{2n+1}{2n+2}\,u_n \quad \text{d'après } (\star).
\end{aligned}$$

4. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n^2 \leq \dfrac{1}{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n^2 \leq \dfrac{1}{2n+1}$.

- **Initialisation.** Posons $n = 0$. D'après la question 2 on sait que $u_0 = 1$, donc $u_0^2 = 1$. De plus, $\frac{1}{2\times 0+1} = 1$. On a donc $u_0^2 = \frac{1}{2\times 0+1}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après la question 1, on a $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,u_n$, donc :

$$u_{n+1}^2 = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}\,{u_n}^2 = \frac{2n+1}{(2n+2)^2}\,(2n+1){u_n}^2.$$

D'après la question 1 avec $x = n$, on sait que $\dfrac{2n+1}{(2n+2)^2} \leq \dfrac{1}{2n+3}$. Ainsi,

$$u_{n+1}^2 \leq \frac{1}{2n+3}\,(2n+1){u_n}^2 = \frac{2n+1}{2n+3}{u_n}^2.$$

Puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on a : $u_n^2 \leq \dfrac{1}{2n+1}$. On en déduit que :

$$u_{n+1}^2 \leq \frac{2n+1}{2n+3}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2(n+1)+1}.$$

Autrement dit, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** La propriété $\mathcal{P}$ étant initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \leq \frac{1}{2n+1}.$$